APPUNTI DI ALGEBRA LINEARE

Federico G. Lastaria

Mauro Saita

Questi appunti possono essere utilizzati per un corso iniziale di algebra lineare e geometria. Per approfondire gli argomenti, si consiglia di consultare i libri citati in bibliografia.

Milano, settembre '99.

Federico G. Lastaria
Mauro Saita

Bibliografia

S. Abeasis, *Elementi di Algebra Lineare e Geometria*, Zanichelli, Bologna,1993.

R. Betti, *Lezioni di Geometria, Parte Prima,* Masson, Milano, 1995.

Indice

Capitolo 1

Spazi vettoriali e Applicazioni Lineari

1.1 Gli spazi vettoriali reali

I punti del piano, e quelli dello spazio, si possono rappresentare mediante coppie o, rispettivamente, terne ordinate di numeri reali, quando si fissa un sistema di riferimento cartesiano. Questo suggerisce l'idea di considerare l'insieme $\mathbb{R}^n$ delle n-uple ordinate di numeri reali come uno spazio di "vettori", che scriveremo come vettori riga:

$$v = \begin{vmatrix} a_1 & . & . & . & a_n \end{vmatrix} \qquad \text{o anche} \qquad (a_1, ..., a_n)$$

o come vettori colonna:

$$v = \begin{vmatrix} a_1 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{vmatrix}$$

Lo spazio $\mathbb{R}^n$ delle n-uple di numeri reali è l'esempio più comune di spazio vettoriale. Quando pensiamo a $\mathbb{R}^n$ come a uno spazio vettoriale, intendiamo prendere in considerazione *soltanto due* operazioni:

- la *somma di vettori*:

$$\begin{vmatrix} a_1 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 \\ . \\ . \\ . \\ a_n + b_n \end{vmatrix};$$

- la *moltiplicazione di uno scalare reale per un vettore*:

$$\lambda \begin{vmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda b_1 \\ . \\ . \\ . \\ \lambda b_n \end{vmatrix}$$

  dove λ è un numero reale.

Veniamo ora alla definizione precisa di spazio vettoriale.

Definizione 1.1.1 *Uno* spazio vettoriale reale *è un insieme V con due operazioni:*

- *la* somma*:*

$$\begin{array}{rcl} V \times V & \longrightarrow & V \\ (v, w) & \longmapsto & v + w \end{array}$$

- *la* moltiplicazione per uno scalare*:*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} \times V & \longrightarrow & V \\ (\lambda, v) & \longmapsto & \lambda v \end{array}$$

Questeoperazioni devono soddisfare i seguenti assiomi:

1. *La somma è* commutativa*: per ogni v, w in V*

$$v + w = w + v$$

2. *La somma è* associativa*: per ogni u, v, w in V*

$$(u + v) + w = u + (v + w)$$

3. *Esiste un vettore in V, il vettore nullo 0, che è* elemento neutro *rispetto all'operazione di somma, nel senso che*

$$v + 0 = v$$

per ogni vettore v.

4. *Per ogni vettore $v \in V$ esiste un vettore, l'*opposto *di v, denotato $-v$, che sommato a v dà il vettore nullo:*

$$v + (-v) = 0.$$

Diremo allora che V, con l'operazione di somma, è un gruppo abeliano.

5. *Per ogni v, w in V e per ogni λ, μ in $\mathbb{R}$*

$$\begin{array}{rcl} \lambda(\mu v) & = & (\lambda\mu)v \\ (\lambda + \mu)v & = & \lambda v + \mu v \\ \lambda(v + w) & = & \lambda v + \lambda w \\ 1v & = & v \end{array}$$

Esempio. Abbiamo già visto che l'insieme $\mathbb{R}^n$ delle n-uple ordinate di numeri reali (n intero positivo) è uno spazio vettoriale.

Esempio. Sia V l'insieme di tutte le funzioni a valori reali definite su un qualunque insieme D:

$$V = \mathbb{R}^D = \{\text{tutte le funzioni} \quad f : D \longrightarrow \mathbb{R}\}.$$

Qui consideriamo solo le due operazioni di somma $f + g$ di funzioni e di moltiplicazione λf di un numero per una funzione, definite nel modo seguente:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

per ogni f, g in V, per ogni $x \in D$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. Con queste due operazioni, V è uno spazio vettoriale.

Vedremo che un caso tipico è quello in cui D è l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali o un suo sottoinsieme, come nell'esempio seguente.

Esempio. Un esempio di spazio vettoriale è l'insieme $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ di tutte le funzioni $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. Una funzione $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ si chiama *successione di numeri reali* e viene di solito scritta come

$$(f_0, f_1, f_2, \dots).$$

Esempio. Siano a e b due numeri fissati e poniamo $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = 0\}$ l'insieme delle soluzioni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ dell'equazione lineare omogenea $ax + by = 0$. Si vede facilmente che S è uno spazio vettoriale.

Esempio. Siano a, b, c sono numeri fissati e sia $c \neq 0$. Allora $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0\}$ non è uno spazio vettoriale. Perché?

1.1.1 Lo spazio vettoriale delle matrici $m \times n$

Un esempio importante di spazio vettoriale è quello delle matrici $m \times n$. Siano m, n due interi ≥ 1. Una tabella di numeri

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & . & . & . & . & a_{mn} \end{vmatrix}$$

è detta *matrice* $m \times n$. La matrice ha m *righe* e n *colonne*. Chiameremo a_{ij} l'*elemento* (o *entrata*, o *componente*) di posto ij. L'indice i è l'*indice di riga*, l'indice j è l'*indice di colonna*. Dunque a_{ij} è l'elemento che compare sulla i-esima riga e sulla j-esima colonna. In genere per denotare una matrice usiamo un simbolo come A, B eccetera.

Esempio. $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ è una matrice 2×3. Se ci riferiamo a questa matrice come a $A = (a_{ij})$, allora $a_{11} = 1$ $a_{12} = 0$, $a_{13} = 3$, $a_{21} = 2$, $a_{22} = -1$ e $a_{23} = 2$.

Esempio. Una matrice $m \times 1$ è un *vettore colonna* di $\mathbb{R}^m$. Non useremo l'indice di colonna, e scriveremo un vettore colonna semplicemente come:

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_m \end{vmatrix}$$

Un matrice $1 \times n$ è un *vettore riga* di $\mathbb{R}^n$. Ometteremo l'indice di riga, e scriveremo un vettore riga come

$$\begin{vmatrix} y_1 & . & . & . & y_n \end{vmatrix} \quad \text{oppure come} \quad (y_1, ..., y_n).$$

Una matrice 1×1 contiene un unico numero, e non la distingueremo dalla sua unica componente.

Somma di matrici. Si definisce la somma di due matrici solo quando sono entrambe dello stesso tipo $m \times n$. Siano dunque $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ due matrici $m \times n$. La *somma* $A + B$ è la matrice $C = (c_{ij})$ di tipo $m \times n$, il cui elemento di posto ij è

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Si dice che la somma di matrici si fa *per componenti*.

Esempio. Se $A = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}$, $\quad B = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$, allora $A + B = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}$

Esempio. La matrice nulla $m \times n$ è la matrice 0 con tutte le componenti nulle. Allora

$$A + 0 = A$$

per ogni matrice A di tipo $m \times n$.

Ad esempio:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}, \quad -A = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix},$$

Per ogni matrice A, si denota con $-A$ la matrice di componenti $(-A)_{ij} = -A_{ij}$. Allora $A + (-A) = 0$.

Moltiplicazione di un numero per una matrice. Se λ è un numero reale e $A = (a_{ij})$ è una matrice $m \times n$, definiamo λA come la matrice $m \times n$ la cui componente $(\lambda A)_{ij}$ è

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

Esempio. Se $\lambda = 2$ e $A = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$, allora $2A = \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 4 & 14 \end{vmatrix}$

Diremo anche che λA è il *prodotto* dello *scalare* λ per la matrice A.

Proprietà della somma di matrici e della moltiplicazione di uno scalare per una matrice.

A, B, C sono matrici dello stesso tipo $m \times n$ e λ, μ sono numeri reali.

1. (Proprietà commutativa) $\quad A + B = B + A$
2. (Proprietà associativa) $\quad (A + B) + C = A + (B + C)$
3. (La matrice 0 è elemento neutro rispetto alla somma)
$$A + 0 = A$$
4. (Ogni matrice ha un'opposta rispetto alla somma)
$$A + (-A) = 0$$
5. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
6. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
7. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \lambda B$
8. $1A = A$

Tutte queste proprietà seguono facilmente dalle definizioni e dalle corrispondenti proprietà dei numeri reali. Riassumendo, l'insieme $M(m \times n, \mathbb{R})$ delle matrici reali $m \times n$, dotato delle operazioni di somma e moltiplicazione per uno scalare, è uno spazio vettoriale.

1.2 Combinazioni lineari. Sottospazi.

Sia V uno spazio vettoriale reale e siano $v_1, ..., v_k$ vettori di V.

Definizione 1.2.1 *Per* combinazione lineare *dei vettori $v_1, ..., v_k$ intendiamo un qualsiasi vettore di V del tipo*

$$\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k,$$

dove $\lambda_1, ..., \lambda_k$ sono numeri reali. I numeri $\lambda_1, ..., \lambda_k$ sono i coefficienti *della combinazione lineare.*

Esempio. Consideriamo i due vettori $v_1 = {}^t(1, 0, 1)$, $v_2 = {}^t(1, 1, 2)$ di $\mathbb{R}^3$. Una loro combinazione lineare è ad esempio il vettore

$$3v_1 + 2v_2 = 3 \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{vmatrix}.$$

La loro più generale combinazione lineare è il vettore

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \begin{vmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_2 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 \end{vmatrix}$$

dove λ_1, λ_2 sono numeri reali arbitrari. L'insieme di tutte queste combinazioni lineari è il *piano* generato da v_1 e v_2.

Esempio. Consideriamo i due vettori di $\mathbb{R}^2$

$$e_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \ e_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Diciamo che ogni vettore di $\mathbb{R}^2$ è combinazione lineare di e_1 e e_2. Infatti, per ogni vettore (λ_1, λ_2) di $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_1 \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} + \lambda_2 \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2.$$

Definizione 1.2.2 *I vettori* $v_1, ..., v_k$ *si dicono* linearmente dipendenti *se esistono* k *numeri* $\lambda_1, ..., \lambda_k$ non tutti nulli *per i quali*

$$\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k = 0.$$

In caso contrario, i vettori $v_1, ..., v_k$ *si dicono* linearmente indipendenti.

Dunque i vettori $v_1, ..., v_k$ sono linearmente indipendenti quando

$$\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k = 0$$

vale solo quando $\lambda_1 = ... = \lambda_k = 0$.

Esempi (a) Consideriamo i vettori $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$. Supponiamo che una loro combinazione lineare sia nulla:

$$0 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = \lambda_1(1, 0) + \lambda_2(0, 1) = (\lambda_1, \lambda_2)$$

Ora $(\lambda_1, \lambda_2) = 0$ solo quando $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Dunque i vettori e_1, e_2 sono linearmente indipendenti.

Allo stesso modo si dimostra che $e_1 = (1, ..., 0), e_2 = (0, 1, ..., 0), e_n = (0, ..., 1)$ di $\mathbb{R}^n$ (le componenti di e_i sono tutte zero tranne la i-esima, che è 1) sono vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^n$.

(b) Consideriamo i vettori $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, 1)$, $v_3 = (0, -1, 1)$ di $\mathbb{R}^3$. Una loro arbitraria combinazione lineare è

$$\lambda_1(1, 0, 0) + \lambda_2(1, 1, -1) + \lambda_3(0, 1, -1) = (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2 + \lambda_3, -\lambda_2 - \lambda_3).$$